

HYDRODYNAMIQUE

1. Etude des fluides en mouvement

...sous l'action des forces qui lui donnent naissance.

1_A. Nature d'un fluide

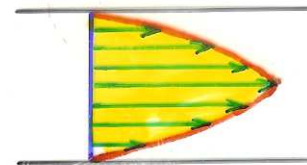
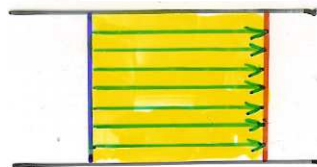
1_{A1} fluide parfait

Fluide idéal, incompressible non visqueux.

(ses différentes parties peuvent glisser les unes par rapport aux autres sans frottements, donc sans dépense de travail)

fluide parfait

Répartition des vitesses



fluide visqueux

1_{A2} fluide visqueux

Compressible.

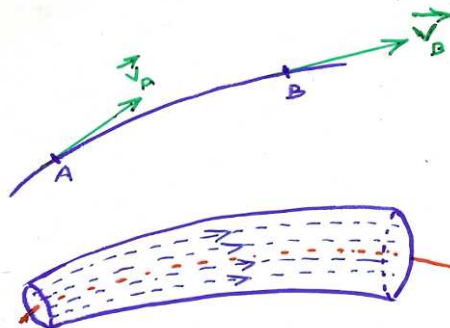
Une couche entraînée par une couche voisine rapide, exerce sur elle des forces retardatrices avec dépense de travail (*forces de viscosité*).

Inversement la couche la plus rapide exerce sur la plus lente des forces accélératrices.

Ces forces s'exercent aussi sur les couches en contact avec les parois. (écoulement dans un tuyau).

Le travail des forces de viscosité est négatif, ce qui entraîne un dégagement de chaleur qui chauffe le fluide et les parois.

1_B. Définitions



1_{B1} ligne de courant

Trajectoire décrite par une particule de fluide, elle est tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse.

1_{B2} particule de courant

Partie de fluide suffisamment petite (grand nombre de molécules) quasi ponctuelle à l'échelle macroscopique, mais assez grosse à l'échelle microscopique pour définir sa pression.

1_{B3} tube de courant

Ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé.

1_{B4} écoulements

a- écoulement permanent

(stationnaire)

Les vitesses, ainsi que les pressions, restent inchangées au cours du temps en chaque point du fluide.
(elles peuvent varier entre deux points différents du fluide)

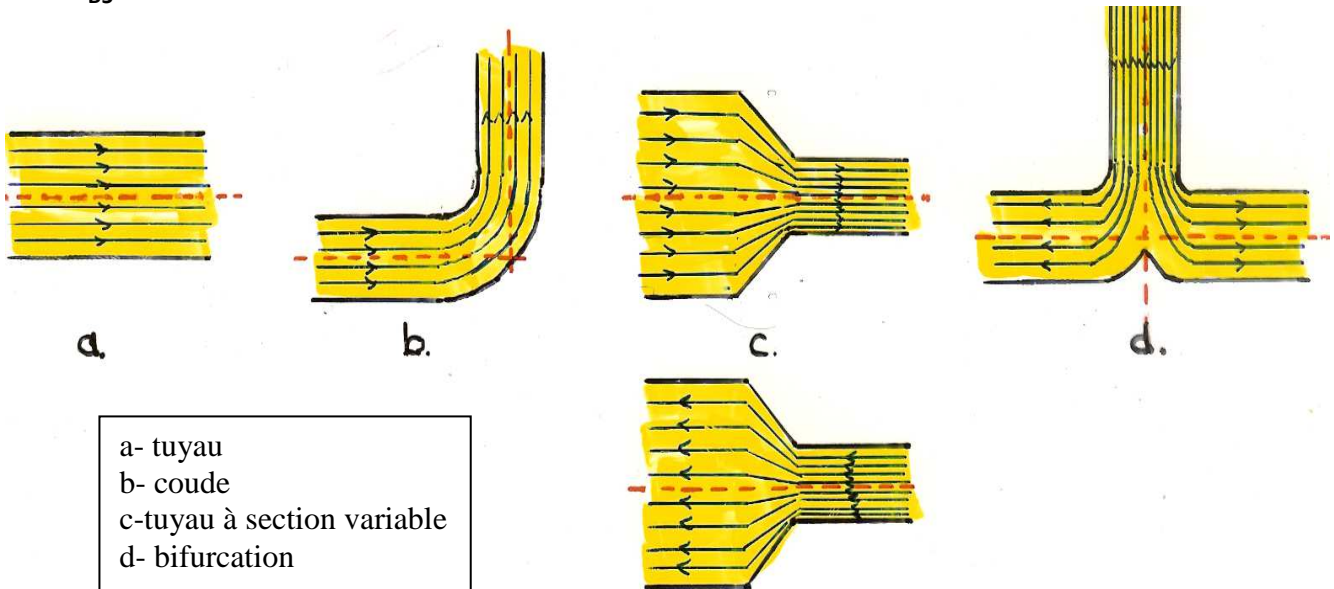
b- écoulement uniforme

Les vitesses sont les mêmes en tout point du fluide à chaque instant.
(le long des canalisations de diamètre constant)

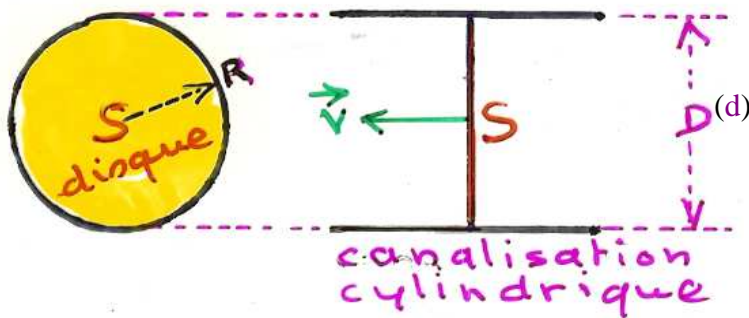
c- autres

Un écoulement peut être uniforme et non permanent, mais aussi permanent et non uniforme.

1_{B5} conduites



1_c. Canalisation cylindrique à section circulaire



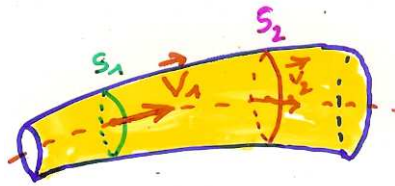
$$S = \pi.R^2 \quad (R = \frac{d}{2})$$

$$S = \pi.\frac{d^2}{4}$$

1_D. Débits volumique D_v ($Q_v - q_v$) et massique D_m ($Q_m - q_m$)

$D_v = S.v$	<p>Débit volumique D_v ($m^3.s^{-1}$)</p> <p>v : vitesse moyenne du fluide dans la section ($m.s^{-1}$)</p> <p>S : section de l'écoulement (m^2)</p>	$D_v = \frac{V}{t}$
$D_m = \rho.D_v$	<p>Débit massique D_m ($kg.s^{-1}$)</p> <p>ρ : masse volumique du fluide homogène ($kg.m^{-3}$)</p> <p>t : durée de l'écoulement (remplissage ou vidage)</p> <p>m : masse écoulee (kg)</p> <p>V : volume écoulee (m^3)</p>	$D_m = \frac{m}{t}$

1^E. Equation de continuité



(bifurcation : $D_v = D_{v1} + D_{v2}$)

Le long d'un tube de courant
le débit est constant :

$$D_v = S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

Exercice 1 :

Dans une **conduite cylindrique** à deux sections droites différentes S_1 et S_2 , de diamètres d_1 et d_2 , de rayons R_1 et R_2 , et à débit constant, établir la relation qui existe... :

- 1) ...entre v_1 , v_2 , S_1 et S_2 .
- 2) ...entre v_1 , v_2 , d_1 et d_2 .
- 3) ...entre v_1 , v_2 , R_1 et R_2 .

Exercice 2 :

Dans une **canalisation cylindrique** de section progressivement variable, s'écoule de l'eau avec un débit volumique constant $D_v = 13,3 \text{ L.s}^{-1}$.

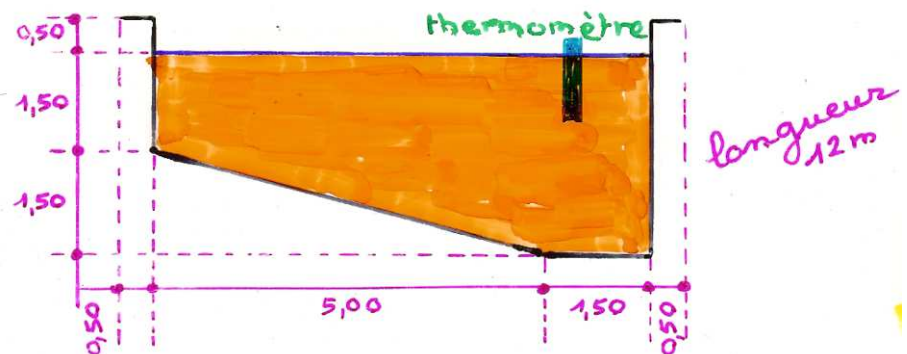
Calculer :

- 1) Le débit massique D_m de l'eau.
- 2) Les vitesses v_1 et v_2 de l'écoulement dans deux sections droites de diamètres $d_1 = 20 \text{ cm}$ et $d_2 = 30 \text{ cm}$.

Exercice 3 :

Une **piscine** est remplie d'eau.

- 1) Calculer le volume V d'eau qu'elle contient.
- 2) Exprimer, puis calculer la durée de remplissage de la piscine sachant qu'au cours de l'opération le débit volumique est $D_v = 3 \text{ L.s}^{-1}$.



2. EQUATION de BERNOULLI

(Daniel Bernoulli (1700-1782)

- mathématicien, philosophe, physicien...
- traité d'hydrodynamique...

hypothèses :

fluide parfait

écoulement permanent

masse volumique constante

le fluide ne change pas d'état

z_A et z_B : altitudes des points A et B (m)

P_A et P_B : pressions absolues du fluide aux points A et B (Pa)

v_A et v_B : vitesses moyennes du fluide aux points A et B (m.s^{-1})

E_{mh}^* : énergie algébrique de la machine hydraulique (J)

$|P_{mh}| = \frac{|E|}{t}$: puissance de la machine hydraulique (W)

ρ : masse volumique du fluide (kg.m^{-3})

* pompe : $E > 0$; $P > 0$

g : accélération du champ de pesanteur (m.s^{-2})

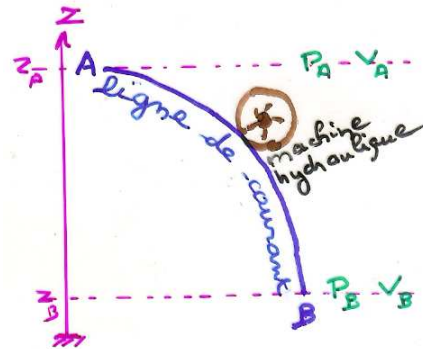
turbine, éolienne : $E < 0$; $|P| > 0$

m (kg) : masse de fluide écoulé pendant un temps t (s)

V (m^3) : volume de fluide écoulé pendant un temps t

D_v : débit volumique du fluide ($\text{m}^3.\text{s}^{-1}$)

$D_m = \rho.D_v$: débit massique du fluide (kg.s^{-1})



$$\frac{1}{2} m \cdot (v_B^2 - v_A^2) + m \cdot g \cdot (z_B - z_A) + \frac{m}{\rho} \cdot (P_B - P_A) = E_{mh} \quad (\text{ou } W_{mh})$$

$$\left| \frac{1}{2} D_m \cdot (v_B^2 - v_A^2) + D_m \cdot g \cdot (z_B - z_A) + \frac{D_m}{\rho} \cdot (P_B - P_A) \right| = P_{mh}$$

puissance avec laquelle varie l'énergie cinétique du fluide

puissance des forces de pesanteur sur le fluide

puissance des forces de pression extérieures sur le fluide

puissance à laquelle la machine hydraulique reçoit (ou fournit) de l'énergie du (ou au) fluide

Autre façon d'écrire l'équation avec : $\left(\frac{1}{2} m.v^2 + m.g.z + \frac{m}{\rho} . P \right) :$

(énergie cinétique + énergie potentielle de pesanteur + énergie potentielle de pression en un point)

$$\left(\frac{1}{2} m.v_B^2 + m.g.z_B + \frac{m}{\rho} . P_B \right) - \left(\frac{1}{2} m.v_A^2 + m.g.z_A + \frac{m}{\rho} . P_A \right) = E_{mh}$$

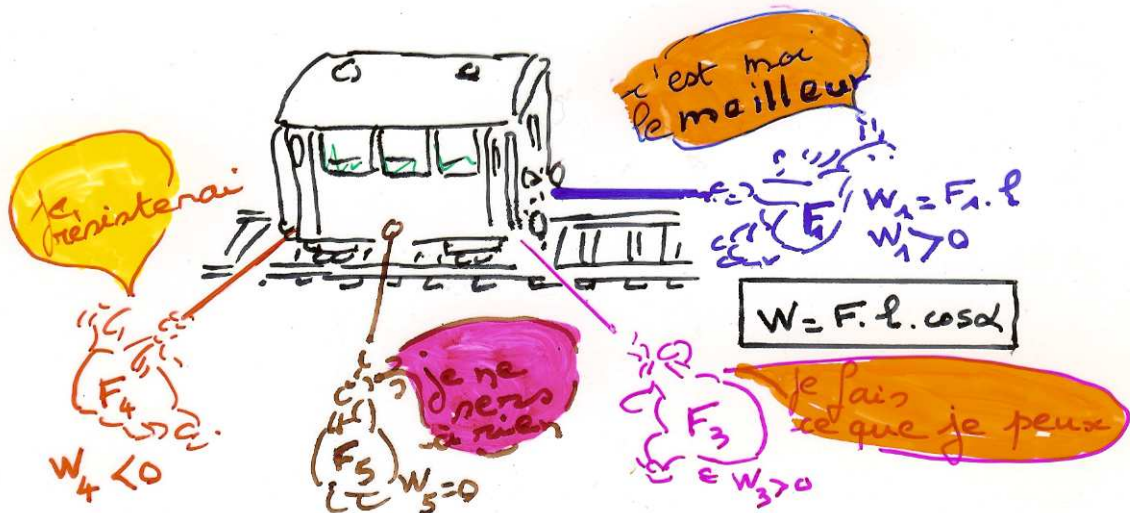
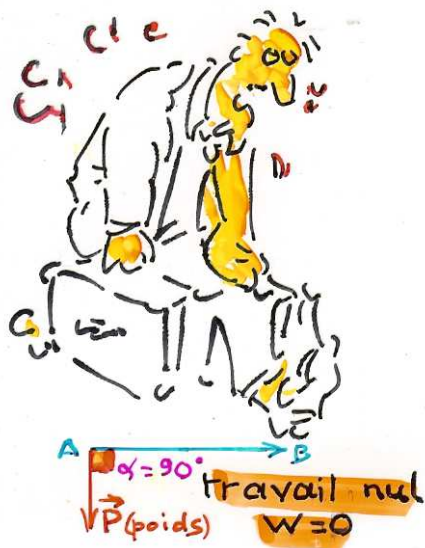
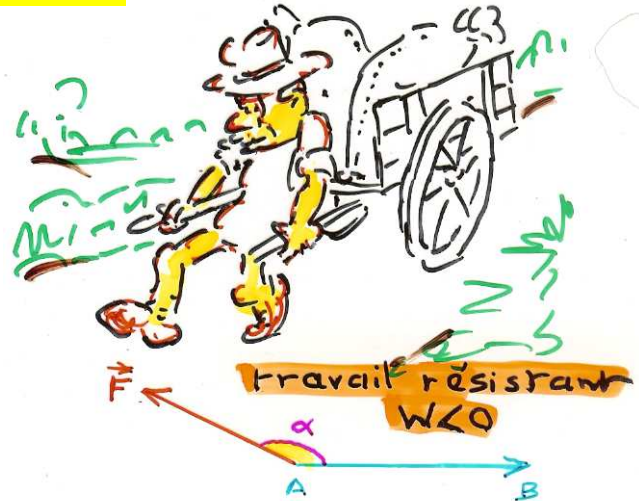
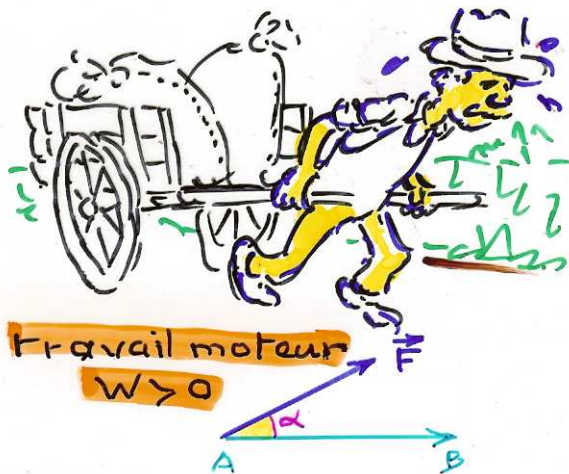
$$E_B - E_A = E_{mh}$$

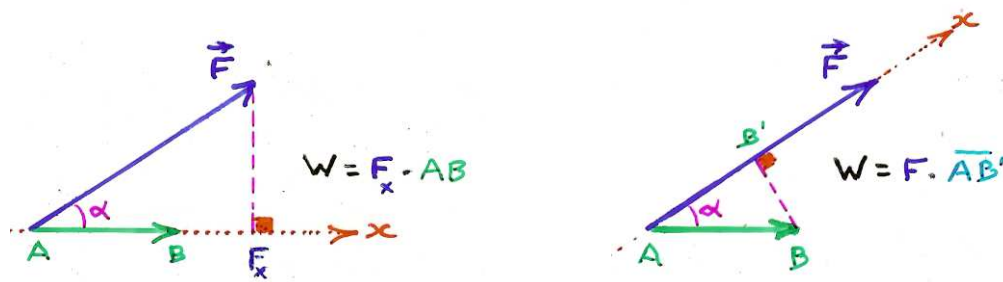
3. Explications

3A. Travail

Pendant son déplacement, une force effectue un travail :

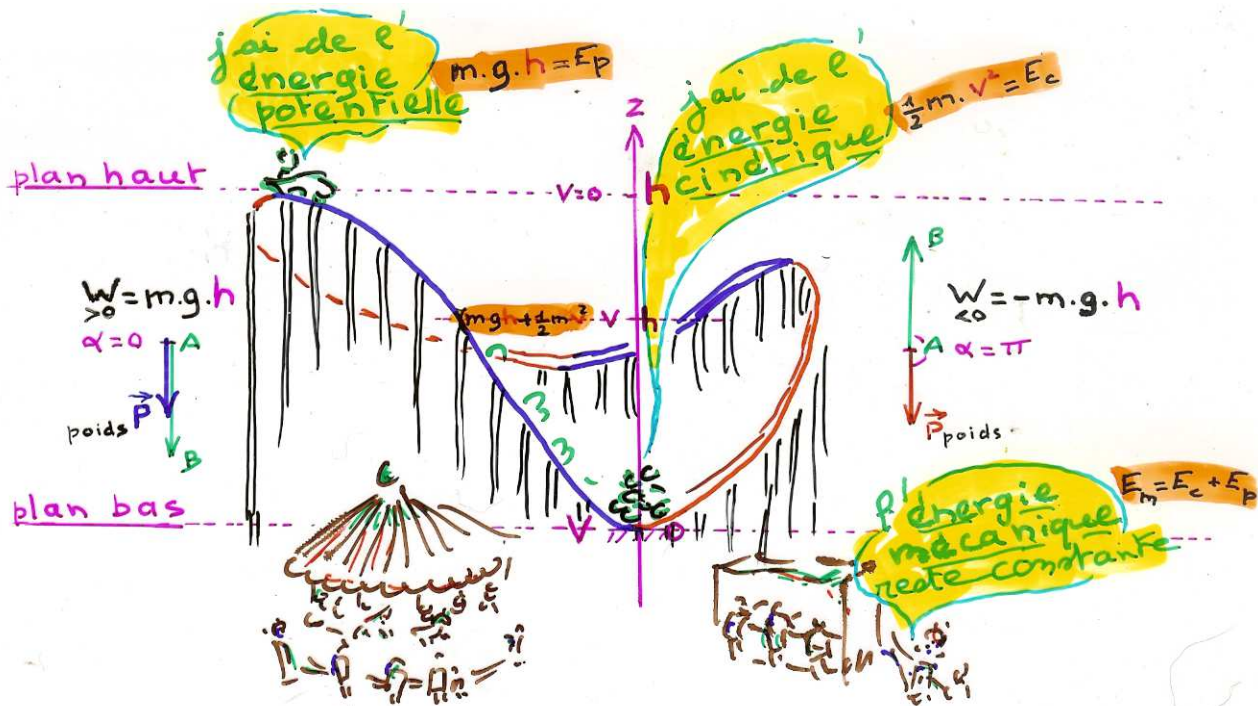
$$W = \vec{F} \cdot \vec{\ell} = F \cdot \ell \cdot \cos \alpha$$





3_B. Energie cinétique et Energie potentielle de pesanteur

Imaginons un manège idéal, sans frottements, de masse m .



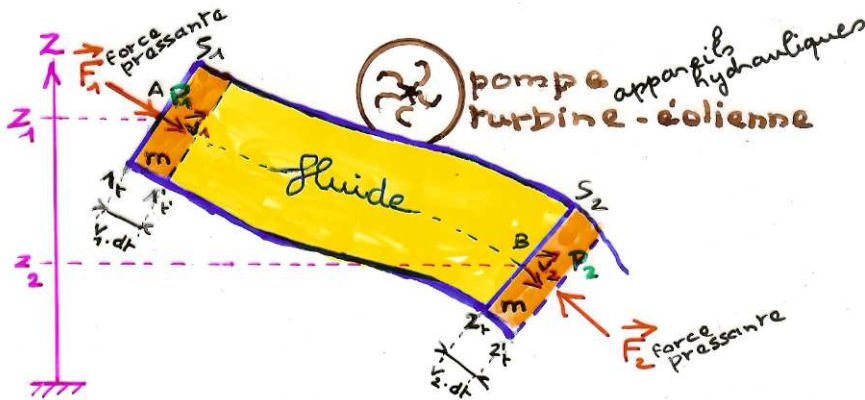
••Exercice 4 : ($g = 10 \text{ m.s}^{-2}$)

La **voiture du manège** a une masse $m = 100 \text{ kg}$, l'altitude maximale atteinte par la voiture est $h = 10 \text{ m}$.

- 1) Calculer son énergie potentielle de pesanteur E_p au plan haut.
 - 2) En déduire son énergie cinétique E_c au plan bas, sachant que l'énergie potentielle de pesanteur est intégralement transformée en énergie cinétique (*il n'y a aucuns frottements*).
Calculer la vitesse maximale V atteinte au plan bas.
 - 3) Calculer le travail moteur effectué par le poids de la voiture au cours du déplacement plan haut-plan bas.
Calculer le travail résistant effectué par ce poids au cours du déplacement plan bas-plan haut.
 - 4) Montrer que pour chaque déplacement la variation d'énergie cinétique $\Delta E_c = E_{c, \text{arrivée}} - E_{c, \text{départ}}$ est égale au travail du poids.
 - 5) En supposant que ce déplacement se fait sans frottements, l'énergie mécanique de la voiture se conserve.
 - a- Quelle est la valeur de cette énergie mécanique au plan haut et au plan bas.
 - b- Calculer la vitesse de la voiture quand celle-ci passe à la hauteur $z = h = 3 \text{ m}$.
- En réalité, à cause des frottements, l'énergie mécanique se dégrade et la voiture finit par s'arrêter au plan bas (puits de potentiel).

La variation d'énergie cinétique ΔE_c est égale à la somme des travaux des forces extérieures $W = \sum W_{F_{\text{ext}}}$

3c. Application à l'hydrodynamique



Le tube de courant se déplace de 1-2 à 1'-2'
 Tout se passe comme si un solide se déplace de 1-1' à 2-2' en changeant de forme sans changer de masse m de l'altitude z_1 à l'altitude z_2

On a :

- l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m.v^2$

- l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = m.g.z$

- et puisqu'on a un fluide : l'énergie potentielle de pression $E_r = \frac{m}{\rho} . P$

(une force pressante F se déplace de $v.dt = \ell$, son travail : $W = F.\ell = P.S.\ell = P.V = P.\frac{m}{\rho}$)

\vec{F}_1 : force motrice, elle pousse la masse m et \vec{F}_2 : force résistante, elle retient la masse m)

4. Simplification des calculs

$$\bullet \frac{1}{2} m \cdot (v_B^2 - v_A^2) + m \cdot g \cdot (z_B - z_A) + \frac{m}{\rho} \cdot (P_B - P_A) = E_{mh}$$

$$\bullet \left| \frac{1}{2} D_m \cdot (v_B^2 - v_A^2) + D_m \cdot g \cdot (z_B - z_A) + \frac{D_m}{\rho} \cdot (P_B - P_A) \right| = P_{mh} \quad (\bullet D_m = \rho \cdot D_v)$$

Dans l'équation de Bernoulli, g et ρ étant des constantes connues, il y a beaucoup d'inconnues (10, 11 avec D)

Aussi pour ne conserver qu'une seule inconnue, il y a des simplifications à faire :

1- Axe des altitudes :

Orienté suivant la verticale ascendante.

L'origine ces altitudes étant indifférente, il sera judicieux de la prendre au point le plus bas ($z_B = 0$).

2- Si l'un des points (A ou B), se situe sur une grande surface libre ou dans une canalisation de grande section S devant les autres sections (au moins 10 fois plus), sa vitesse est négligeable ($v \approx 0$) devant les autres vitesses (vitesse au carré : 100 fois inférieure aux autres vitesses au carré).

3- Si une ligne s'arrête sur un obstacle, on a un point d'arrêt ou, la vitesse du fluide est nulle ($v = 0$).

4- Tout point du fluide situé sur une surface libre est à la pression du gaz se trouvant à son contact. S'il s'agit de l'atmosphère, cette pression est égale à la pression atmosphérique (P_{atm}).

5- Si entre les points A et B, d'une même ligne de courant, celle-ci ne traverse **aucune machine hydraulique**, E_{mh} donc P_{mh} nulles ($E_{mh} = 0$; $P_{mh} = 0$). (exercices 5 à 20)

$$\frac{1}{2} m \cdot (v_B^2 - v_A^2) + m \cdot g \cdot (z_B - z_A) + \frac{m}{\rho} \cdot (P_B - P_A) = 0$$

(après simplifications : $\times \frac{1}{m}$ et $\times \rho$)

$$\frac{1}{2} \rho \cdot (v_B^2 - v_A^2) + \rho \cdot g \cdot (z_B - z_A) + (P_B - P_A) = 0$$

$$\frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot z + P = \text{constante}$$

invariant de Bernoulli

• Exercice 5 :

Une conduite d'eau cylindrique va d'un point 1 à un point 2.

Etat initial au point 1 : pression $P_1 = 15 \cdot 10^4$ Pa ; vitesse $v_1 = 8 \text{ m.s}^{-1}$; hauteur $z_1 = 12 \text{ m}$.

Etat final au point 2 : pression $P_2 = 10 \cdot 10^4$ Pa ; hauteur $z_2 = 2 \text{ m}$.

1) Calculer la vitesse v_2 .

2) Sachant que le débit volumique est $D_v = 6 \text{ L.s}^{-1}$, calculer les diamètres d_1 et d_2 de la conduite.

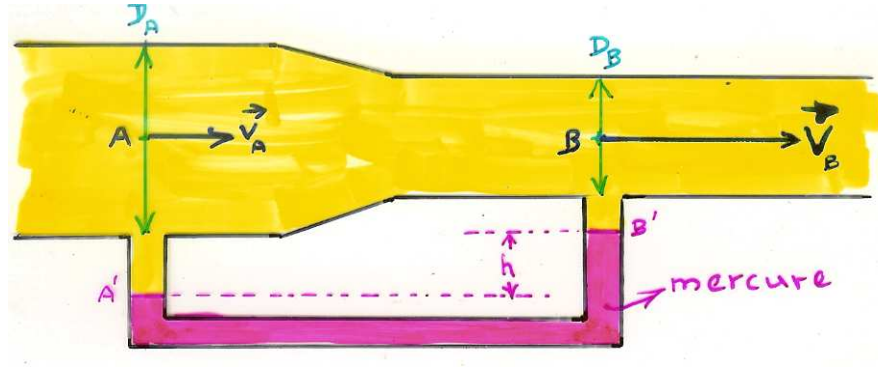
Exercice 6 :

Une canalisation cylindrique de section progressivement variable et d'inclinaison quelconque est parcourue par l'écoulement d'un liquide de densité $d = 0,9$.

Calculer la différence de pression $P_2 - P_1$ entre deux points A_1 et A_2 , d'altitude z_1 et z_2 situés sur la même ligne de courant.

($z_2 - z_1 = 4,8 \text{ dm}$ axe orienté vers le haut ; $v_1 = 4,1 \text{ m.s}^{-1}$ et $v_2 = 0,34 \text{ m.s}^{-1}$)

•Exercice 12 :



Une conduite d'eau cylindrique présente un rétrécissement pour accélérer la circulation de l'eau.

Un **dispositif au mercure** (tuyauterie dans laquelle les fluides sont au repos : mercure et eau au dessus, jusqu'à la canalisation) permet de mesurer la différence de pression $P_A - P_B$ entre les deux points A et B de la canalisation, situés dans un même plan horizontal de part et d'autre du rétrécissement.

(on néglige les variations de pression dues à l'eau des colonnes, au dessus du mercure)

$D_A = 30 \text{ cm}$; $D_B = 20 \text{ cm}$; $P_A - P_B = 10^4 \text{ Pa}$; $\rho_{\text{mercure}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

1) Exprimer littéralement :

a- Le rapport des vitesses $\frac{v_A}{v_B}$ en fonction des diamètres D_A et D_B .

b- La vitesse v_B en fonction de la différence de pression $P_A - P_B$, des diamètres D_A et D_B ainsi que de la masse volumique ρ_{eau} de l'eau.

2) Calculer v_B .

3) En déduire le débit volumique Q_v de l'eau.

4) Exprimer, puis calculer la dénivellation h du mercure.

5. Limite hydrostatique de l'équation de Bernoulli

Quand l'écoulement cesse (fermeture d'un robinet, d'une vanne...), l'équation se simplifie :

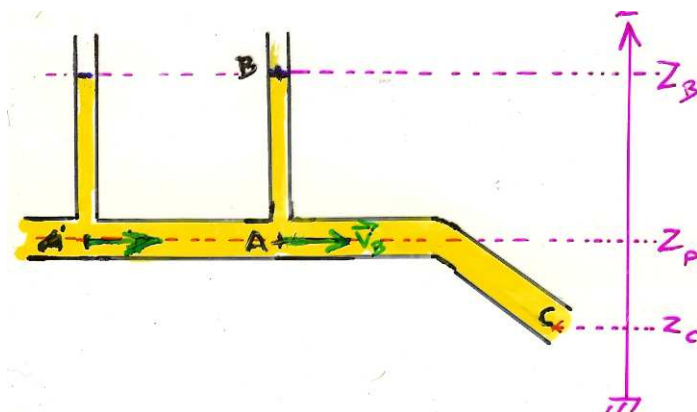
-vitesses nulles et absence de machine hydraulique-

$$m \cdot g \cdot (z_B - z_A) + \frac{m}{\rho} \cdot (P_B - P_A) = 0 ; \text{ et après simplifications :}$$

$$P_A + \rho \cdot g \cdot z_A = P_B + \rho \cdot g \cdot z_B \quad (\text{principe de l'hydrostatique})$$

$$P_A - P_B = \rho \cdot g \cdot (z_A - z_B)$$

6. Hydrostatique et hydrodynamique pour un écoulement horizontal



$$P_A + \rho \cdot g \cdot z_A = P_B + \rho \cdot g \cdot z_B$$

$$P_A = P_{A'} \quad v_A = v_{A'}$$

$$P_A + \rho \cdot g \cdot z_A + \frac{1}{2} \rho \cdot v_A^2 = P_C + \rho \cdot g \cdot z_C + \frac{1}{2} \rho \cdot v_C^2$$

Les tubes verticaux contiennent du fluide en équilibre.

••Exercice 13 :

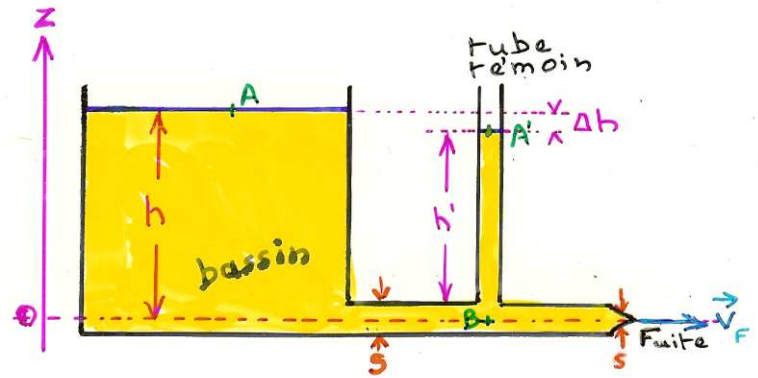
Un bassin de grande surface est rempli d'eau. Il peut se vidanger par une canalisation horizontale de section S .

Un tube témoin, **détecteur de fuite**, permet de déterminer la pression statique P_B dans la canalisation sans perturber l'écoulement.

La canalisation est fermée à son extrémité.

- 1) Pourquoi les niveaux de l'eau sont-ils dans le même plan horizontal dans le bassin et le tube témoin ?

Exprimer la pression due à l'eau au fond du bassin ($z = 0$; $h = 10$ m).



La canalisation, fermée à son extrémité, présente une fuite en F schématisée par un trou de section s .

La fuite d'eau étant faible, on admet que la hauteur d'eau h dans le bassin ne varie pas, alors que celle du tube témoin h' devient inférieure à h .

- 2) Pourquoi ?

- 3) L'eau étant en équilibre dans le tube témoin, exprimer la différence de pression entre les points B et A' en fonction de la hauteur d'eau h' dans ce tube.

- 4) La vitesse d'écoulement de l'eau en F est donnée par la relation de Torricelli : $v_F = \sqrt{2gh}$.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points B et F et en remarquant que $P_F = P_{A'}$,

montrer que $\Delta h = h - h' = \frac{v_B^2}{2g}$.

Calculer Δh si $v_B = 0,14 \text{ m.s}^{-1}$.

7. Paradoxe de Venturi

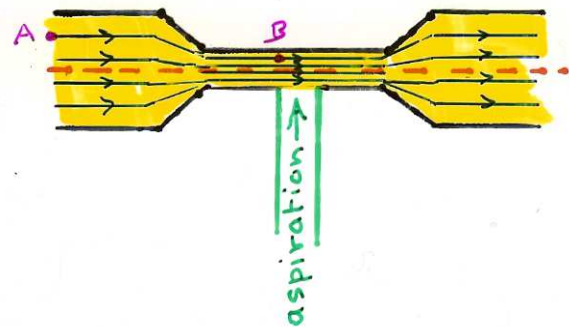
A et B sont sur la même ligne de courant ($z_A \approx z_B$).

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 \quad \text{et} \quad S_A v_A = S_B v_B$$

$$v_B > v_A \text{ entraîne : } P_B < P_A$$

Applications :

- Trombe à eau pour réaliser une pompe à vide rudimentaire
- Pistolet à peinture, ou l'air comprimé d'un compresseur aspire la peinture au niveau du venturi.



•8. Mesure de la vitesse v et du débit volumique D_v

8A. Principe

On dispose des tubes verticaux pour effectuer des prises de pression dans la canalisation.

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{Constante}$$

$\rho g z$: pression due à l'altitude

$\frac{1}{2} \rho v^2$: pression dynamique

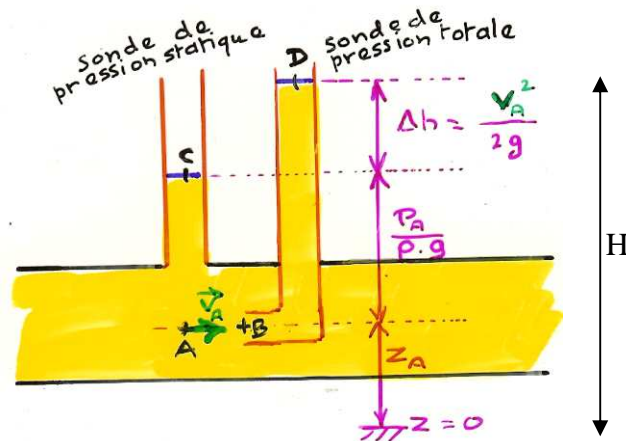
P : pression statique

8B. Tube de Pitot

8B1 mesure de la vitesse d'un liquide

Il est formé de deux tubes :

$$\frac{P}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{Constante} = H \text{ (appelée : charge)}$$



$$z_A = z_B; v_B = 0; P_A = P_B; P_C \approx P_D = P_{\text{atm}}$$

• Entre A et B, le liquide est en mouvement : $\frac{P_B - P_A}{\rho \cdot g} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} + (z_B - z_A) = 0$, soit : $\frac{P_B - P_A}{\rho} - \frac{1}{2}v_A^2 = 0$ (3)

• Entre B et D, le liquide est immobile, principe de l'hydrostatique : $P_B = P_D + \rho \cdot g \cdot (z_D - z_B)$

$$\frac{P_B - P_D}{\rho} = g \cdot (z_D - z_B) \quad (1)$$

• Entre A et C, le liquide est immobile : $\frac{P_A - P_C}{\rho} = g \cdot (z_C - z_A) \quad (2)$

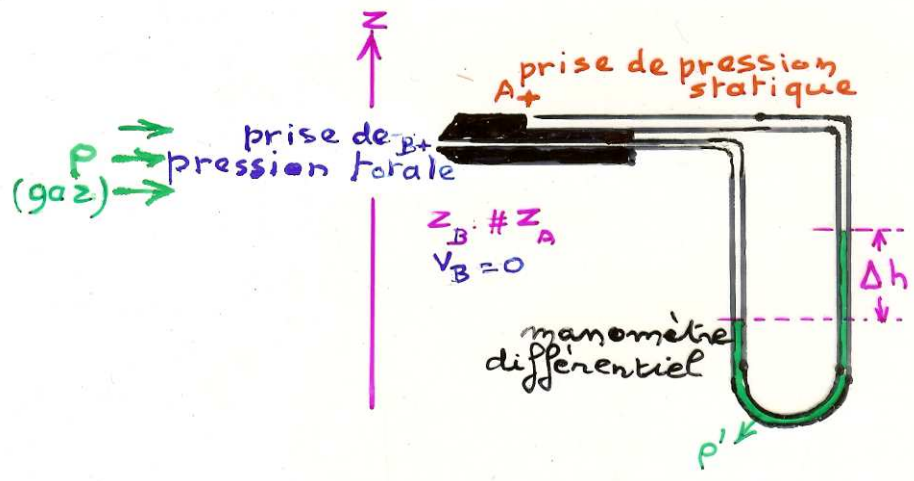
• (1) - (2) : $\frac{P_B - P_A}{\rho} = g \cdot (z_D - z_C) = g \cdot \Delta h$ et avec (3) : $g \cdot \Delta h = \frac{1}{2}v_A^2$

$$v_A = \sqrt{2g \cdot \Delta h}$$

••Exercice 14 :

Soit un tube de Pitot incorporé dans une conduite de section $S = 20 \text{ cm}^2$.

Calculer le débit volumique D_v de l'eau quand la dénivellation des niveaux entre les deux sondes est $\Delta h = 30 \text{ cm}$.

8_{B2} mesure de la vitesse d'un gaz

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho \cdot g} + z_A = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho \cdot g} + z_B$$

$$\frac{v_A^2}{2g} = \frac{P_B - P_A}{\rho \cdot g}$$

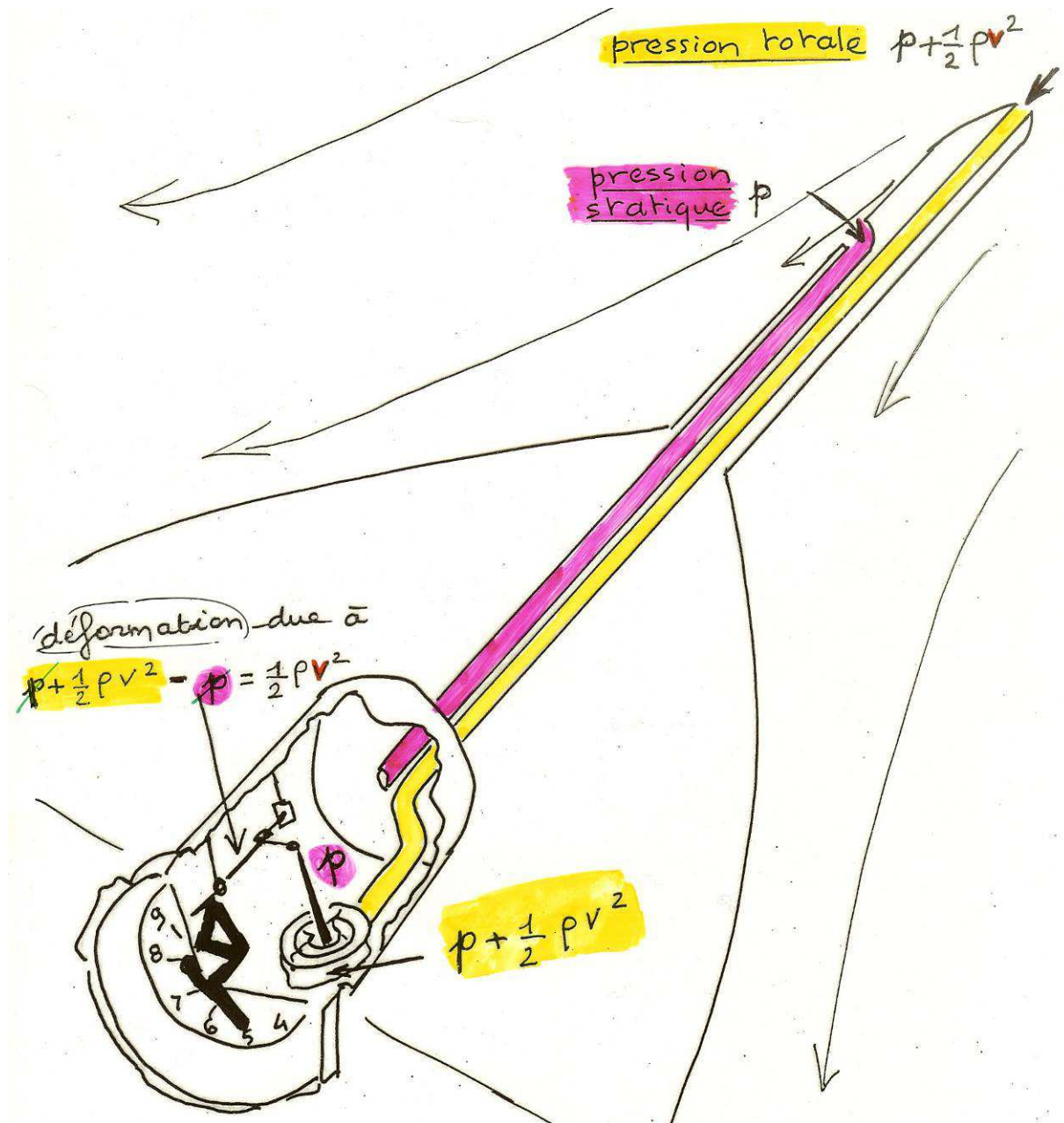
$$P_B - P_A = \rho' \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\frac{v_A^2}{2g} = \frac{\rho' \cdot \Delta h}{\rho}$$

$$v_A = \sqrt{2g \cdot \Delta h \cdot \frac{\rho'}{\rho}}$$

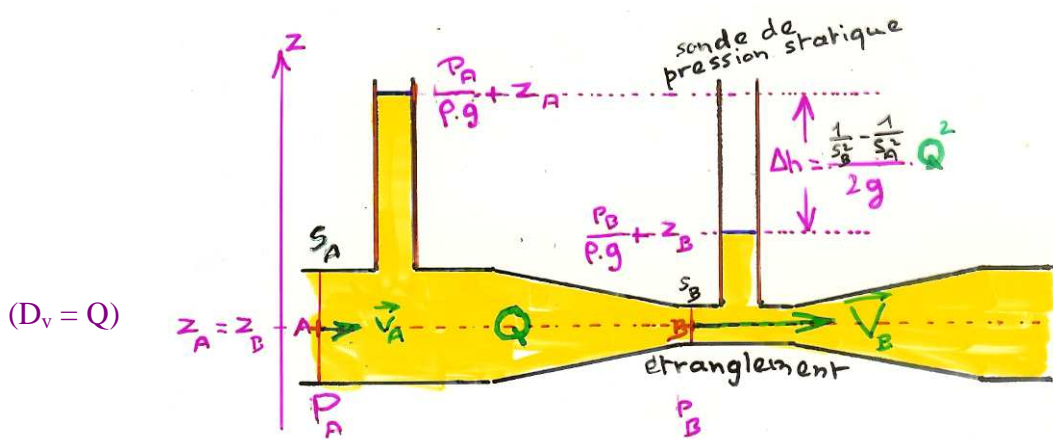
8_{B3} 01-06-2009, airbus A330...

On a évoqué, alors, les tubes de Pitot pour la mesure de la vitesse de l'avion, et leur défaillance éventuelle...



8c. Tube de Venturi

Etranglement avec deux tubes verticaux, on introduit une dépression dans la conduite par effet Venturi.



$$z_A + \frac{P_A}{\rho \cdot g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\rho \cdot g} + \frac{v_B^2}{2g}$$

$$(D_v = S \cdot v)$$

$$S_A^2 \cdot v_A^2 = S_B^2 \cdot v_B^2 = D_v^2$$

$$\frac{D_v^2}{S_A^2} = v_A^2 \text{ et } v_B^2 = \frac{D_v^2}{S_B^2}$$

$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} + \frac{D_v^2}{2g \cdot S_A^2} = \frac{P_B}{\rho \cdot g} + \frac{D_v^2}{2g \cdot S_B^2}$$

$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} - \frac{P_B}{\rho \cdot g} = \Delta h = \frac{D_v^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2} \right)$$

$$D_v^2 = \frac{2g \cdot \Delta h}{\left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2} \right)}$$

••Exercice 15 :

Soit un **tube Venturi** incorporé dans une conduite (surtout les grosses).

Les diamètres des sections du Venturi sont $d_A = 20 \text{ cm}$ à l'entrée et $d_B = 10 \text{ cm}$ à la sortie.

Le Venturi mesure une différence de niveau entre les deux sondes $\Delta h = 20 \text{ cm}$.

Calculer le débit volumique D_v , ainsi que les vitesses d'écoulement v_A et v_B .

9. Jet libre - formule de Torricelli

L'écoulement du fluide est tel que les surfaces libres d'entrée et de sortie sont soumises à la pression atmosphérique.

La section surface libre supérieure est très grande devant celle de l'écoulement à la sortie.

Exercice 16 :

Dans un château d'eau l'évent de la partie supérieure et l'orifice de la partie inférieure sont ouverts à l'air libre.

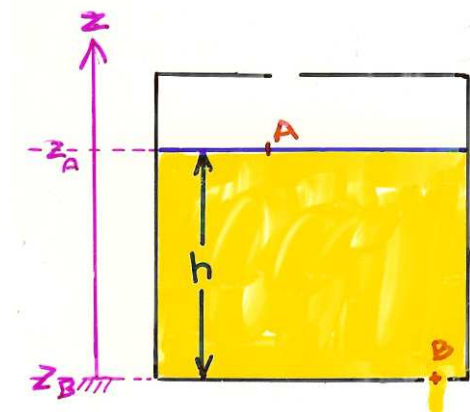
La section de la surface libre est $S = 25 \text{ m}^2$, celle de l'orifice est $s = 100 \text{ cm}^2$.

1) Calculer le rapport $\frac{S}{s}$.

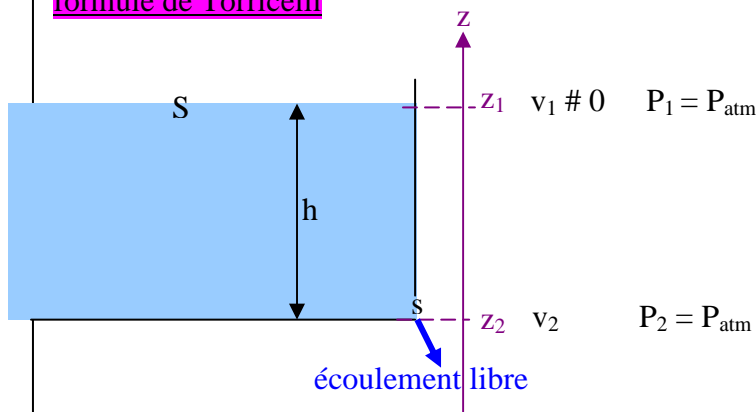
Quelles sont les valeurs de la pression en A et celle en B ?

$$v_2 = v = \sqrt{2gh}$$

2) Calculer la vitesse du jet en B quand $h = 16 \text{ m}$ après avoir rappelé les simplifications si $\frac{S}{s} > 10$.



formule de Torricelli

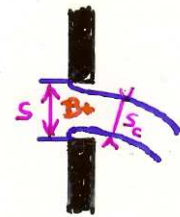


$$P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1$$

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 = \rho g (z_1 - z_2) = \rho g h$$

$$v_2 = v = \sqrt{2gh}$$

L'aire de section du jet s_c est inférieure à l'aire de section de l'orifice s .



Exercice 16...suite :

3) Après avoir calculé le débit volumique à travers l'orifice, calculer la vitesse de déplacement de la surface libre v_1 et justifier ainsi la simplification $v_1 \neq 0$.

4) Calculer la pression de l'eau au niveau de l'orifice, à l'intérieur du réservoir pour $h = 16 \text{ m}$ au début de l'écoulement (hydrodynamique).

Comparer cette pression à celle calculée quand l'orifice est fermé (hydrostatique).

10. Temps du vidage

5) Calculer le volume d'eau contenue dans le réservoir, puis le temps t de vidage de ce réservoir si le débit reste constant.

Ce temps n'est que théorique, pourquoi ?

•••6) Puisque la vitesse d'écoulement $v = \sqrt{2gz}$ dépend de la hauteur d'eau, et que celle-ci diminue

régulièrement, pour utiliser la relation $t = \frac{V}{D_v} = \frac{V}{s \cdot \sqrt{2g \cdot z}}$, il faut faire un calcul intégral.

Pendant une durée très petite dt la hauteur d'eau dans le réservoir varie de dz
le débit est $D_v = S \cdot v_z$

$$\text{avec } v_z = - \frac{dz}{dt} = s \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{z} \quad (dz < 0)$$

La variation de volume d'eau correspondante est $dV = D_v \cdot dt = s \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{z} \cdot dt$

$$\text{ou } dV = - S \cdot dz \\ - S \, dz = s \cdot \sqrt{2g} \cdot \sqrt{z} \cdot dt$$

$$dt = - \frac{S}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}$$

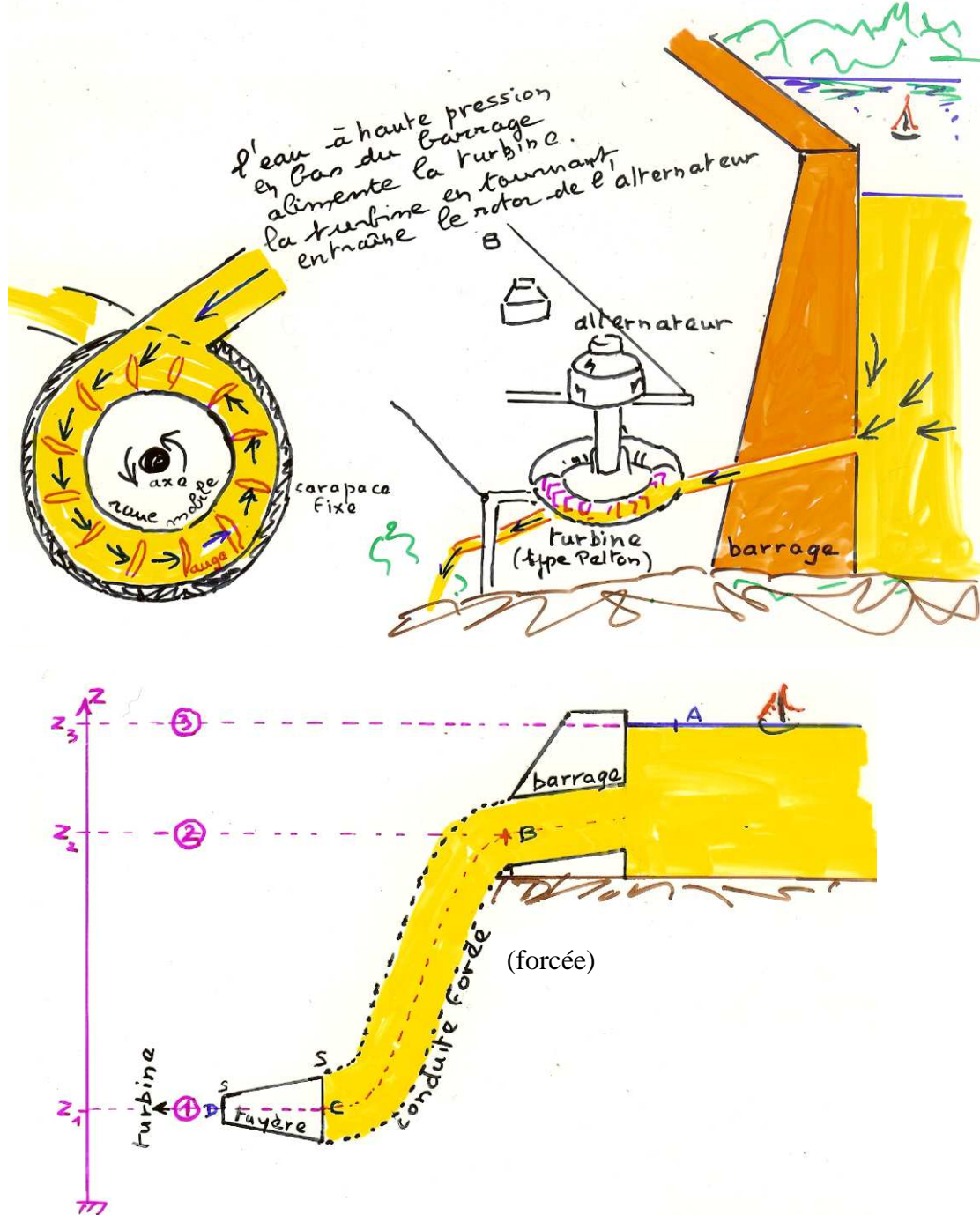
$$t = \int_h^0 - \frac{S}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot dz = - \frac{S}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_h^0 \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot dz = - \frac{S}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \left[2\sqrt{z} \right]_h^0$$

$$t = \frac{S}{s} \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{h}$$

- 7). Calculer la durée réelle de vidage.
La comparer à la durée théorique (5).

Exercice 17 :

L'eau d'un lac artificiel, retenue par un barrage, alimente une centrale hydroélectrique.



$$z_1 = 1300 \text{ m} ; z_2 = 1600 \text{ m} ; z_3 = 1700 \text{ m}$$

On négligera les variations du niveau du lac au cours de l'écoulement.

La tuyère a la forme d'un cône dont les sections d'entrée et de sortie sont $S = 1 \text{ m}^2$ et $s = 200 \text{ cm}^2$.

Il y a une vanne à la sortie du barrage en B.

- 1) Quelle est le rôle de la tuyère ?
- 2) Calculer la pression de l'eau en un point au fond du lac, quand la vanne est fermée.

La vanne est maintenant ouverte, l'eau s'écoule dans l'air.

- 3) Calculer la vitesse v_1 de l'eau à la sortie de la tuyère, ainsi que son débit volumique D_v , son débit massique D_m et sa vitesse v_1 à l'entrée de la tuyère.

Quel serait ce débit à la sortie de la conduite en C, sans la tuyère ?

Relire la question 1).

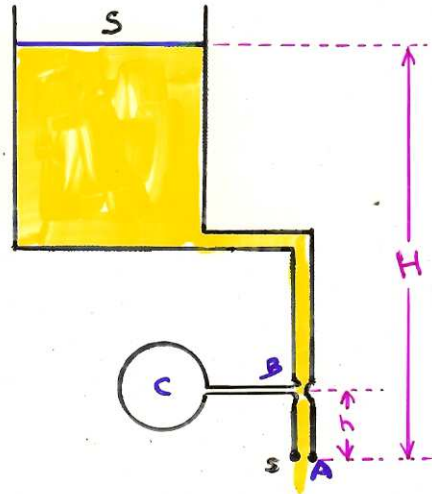
- 4) Sachant que la section de la conduite forcée est celle de l'entrée de la tuyère, que peut-on dire de cette vitesse en d'autres points de la conduite ?

- 5) Calculer la pression au départ de la conduite, en B et à son arrivée à l'entrée C de la tuyère.
- 6) Déterminer l'altitude z_2' de l'entrée de la conduite pour laquelle la pression en B serait nulle.
La comparer avec z_2 .
- 7) Même question si on supprime la tuyère.
Justifier la nécessité de la tuyère à la sortie de la conduite.

Remarque : la pression dans une conduite ne peut pas descendre en dessous de la pression saturante vapeur du fluide. Dès que la pression atteint cette valeur, il se forme des bulles de gaz résultant de la vaporisation du liquide (phénomène de cavitation). C'est un phénomène destructeur : contraintes mécaniques, corrosion...

• Exercice 18 : trombe

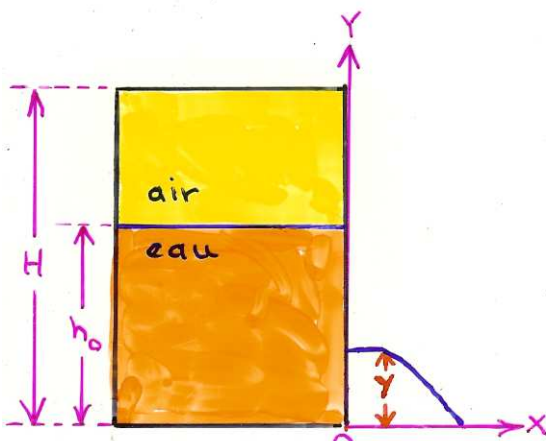
$$\begin{aligned} H &= 0,2 \text{ m} \\ h &= 2 \text{ cm} \\ s_A &= 1 \text{ cm}^2 \\ s_B &= 0,25 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



La section s_A en A est très petite devant la section S au niveau de la surface libre de l'eau.

- 1) Calculer la vitesse de l'eau en A.
 - 2) Calculer la vitesse en B, ainsi que la pression en B.
- Au niveau de B est percée sur le côté du tube une petite communication avec un volume V.
- 3) Quelle est la pression en C ?

•• Exercice 19 : Vidage partiel d'un liquide surmonté d'air comprimé. ($P_{\text{atmosphérique normale}} = 10^5 \text{ Pa}$)



Un grand réservoir cylindrique fermé, de hauteur $H = 2,5 \text{ m}$, contient initialement de l'eau sur une hauteur $h_0 = 1,8 \text{ m}$ surmonté d'air à la pression initiale $1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

On perce la surface latérale du réservoir d'un petit orifice circulaire de rayon $r \ll R$ (R , rayon du grand réservoir) et situé à la distance $y = 40 \text{ cm}$ du fond du réservoir.

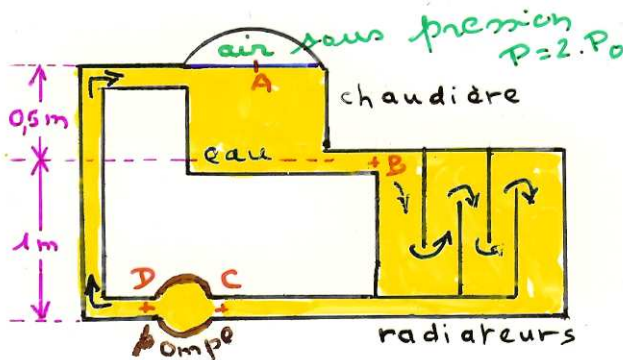
- 1) Calculer la vitesse v_0 d'éjection de l'eau par l'orifice.
- 2) Pendant l'écoulement de l'eau, l'air au dessus de l'eau

se détend. Calculer la vitesse d'éjection v_1 de l'eau lorsque la surpression de l'air par rapport à la pression atmosphérique normale, est réduite de moitié.

- 3) Déterminer l'équation du second degré en h , où h désigne la hauteur d'eau qui reste dans le réservoir au moment où l'eau cesse de s'écouler. Calculer h .

•Exercice 20 :

Dans une installation de chauffage central, la température de l'eau est 80°C ($\rho = 971 \text{ kg.m}^{-3}$).



1) Calculer la vitesse de l'eau, le débit volumique étant égal à $0,5 \text{ L.s}^{-1}$ et la section des conduites $3,14 \text{ cm}^2$.

2) Calculer la pression statique aux points B, C et D.

3) Expliquer pourquoi contrairement aux résultats que l'on trouve, une pompe est nécessaire pour maintenir une différence de pression entre ces extrémités C et D.

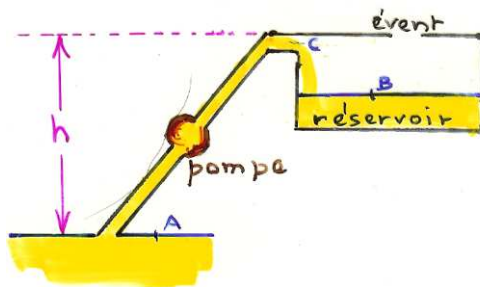
11. Machines hydrauliques

$$\frac{1}{2} m \cdot (v_B^2 - v_A^2) + m \cdot g \cdot (z_B - z_A) + \frac{m}{\rho} \cdot (P_B - P_A) = E_{mh}$$

$$\left| \frac{1}{2} D_m \cdot (v_B^2 - v_A^2) + D_m \cdot g \cdot (z_B - z_A) + \frac{D_m}{\rho} \cdot (P_B - P_A) \right| = P_{mh}$$

(ou) : $\frac{1}{2} \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) + \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) + (P_2 - P_1) = \frac{P_{mh}}{D_v}$ (P_{mh} étant une valeur algébrique)

Exercice 21 :



Le remplissage du réservoir se fait en pompant l'eau du lac par une pompe aspirante.

La vitesse de l'eau de la canalisation est $v = 1,24 \text{ m.s}^{-1}$.

La dénivellation entre les deux plans A et B est $h = 30 \text{ m}$.

1) Calculer l'énergie que la pompe dépense pour chaque mètre cube d'eau écoulé.

Montrer que cette énergie est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique (énergie mécanique) que la pompe communique à l'eau du plan A au plan C.

2) Calculer le débit volumique le diamètre de la conduite étant 8 cm .

Quelle est la durée de ce pompage ?

En déduire la puissance de la pompe.

Exercice 22 :

Un barrage est équipé d'une turbine Pelton.

Les aubes de cette turbine sont entraînées par un jet d'eau sous pression.

Le débit volumique dans la conduite de diamètre $2,5 \text{ m}$ est égal à $25 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$.

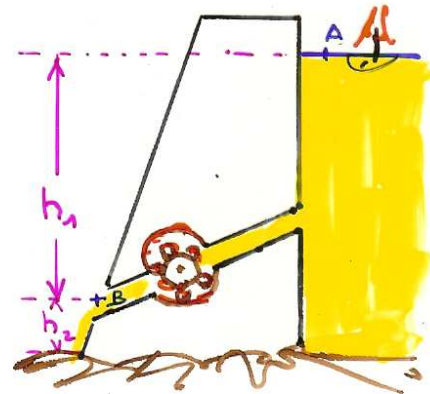
1) Calculer la vitesse de l'eau dans la conduite.

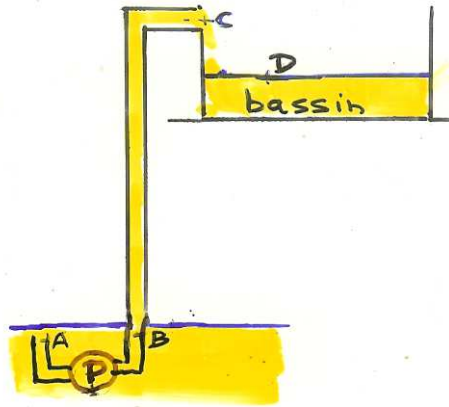
Les dénivellations sont $h_1 = 25 \text{ m}$ et $h_2 = 5 \text{ m}$.

2) Calculer l'énergie reçue par la turbine si le rendement est de 70% pour 1000 m^3 d'eau écoulée.

Exprimer cette énergie en énergie potentielle et en énergie cinétique échangées avec l'eau.

3) En déduire la puissance disponible sur l'arbre de la turbine.



Exercice 23 :

On désire remplir un bassin situé au niveau du sol en pompant de l'eau dans une nappe phréatique.

On place une pompe immergée au niveau de la nappe.

L'eau est alors évacuée avec un débit volumique de $65 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ à l'aide d'une tubulure de refoulement BD de 8 cm de diamètre.

1) Calculer le débit massique de la pompe.

2) Déterminer la valeur de la vitesse d'écoulement v_B de l'eau à l'entrée de la tubulure.

En déduire la vitesse v_C à la sortie de la tubulure.

3) A la sortie de la pompe B la pression est égale à 15 atmosphères ($15 \cdot 10^5 \text{ Pa}$).

Calculer la profondeur H à laquelle est située la pompe. (entre B et C, il n'y a pas de machine).

4) a- Calculer l'énergie mécanique dépensée par la pompe et communiquée à 10 m^3 d'eau.

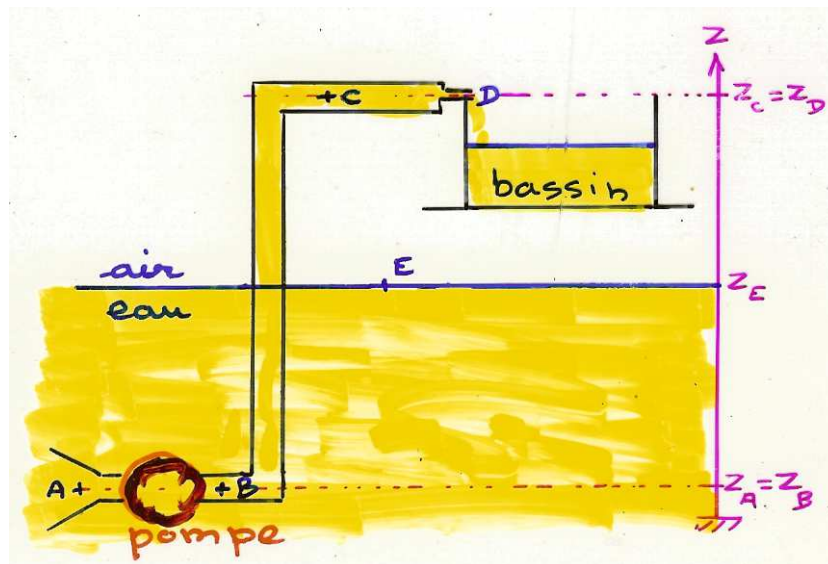
(entre A et B il y a une machine).

b- En déduire la puissance mécanique fournie par la pompe en fonction du débit massique D_m , de la profondeur H et de la vitesse v de l'écoulement.

c- Le rendement de l'ensemble pompe-moteur est 70%, quelle est la puissance électrique consommée ?

Exercice 24 :

Pompe immergée.



Le débit volumique dans la conduite est égal à $17 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$.

Sachant que les sections sont tel que : $s_B = s_C = 3s_D$ et que la vitesse de l'eau à la sortie est $v_D = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1) Calculer les sections s_B , s_C et s_D ainsi que les vitesses v_C et v_B .

2) Déterminer la pression statique de l'eau au point B.

$$z_A = z_B = 0 \text{ et } z_C = z_D = 20 \text{ m}$$

La pompe maintient une différence de pression statique entre les points B et A, $P_B - P_A = 180000 \text{ Pa}$?

3) a- Calculer l'énergie que la pompe fournit à chaque mètre cube d'eau (en joules et en wattheures).

b- En déduire la puissance utile de la pompe.

c- Montrer que la puissance de la pompe ne dépend pas de sa profondeur d'immersion.

4) Calculer la dénivellation $z_E - z_A$.

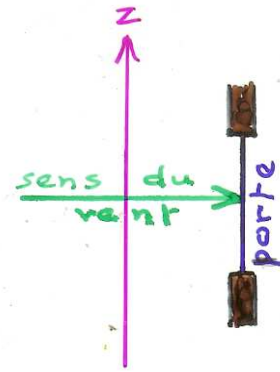
Exercice 25 : ($\rho_{\text{air}} = 1,29 \text{ kg.m}^{-3}$)

Une porte de surface $S = 6 \text{ m}^2$ reçoit un vent de vitesse $v = 100 \text{ km.h}^{-1}$.

- 1) Calculer la différence de pression de part et d'autre de la porte.
- 2) Calculer l'intensité de la force exercée par le vent sur la porte.

Que peut-il se passer pour la porte ?

- 3) Lors d'une bourrasque de vent quel « voyage » peut entreprendre les tuiles d'une toiture ?



••Exercice 26 : Profil d'une aile d'avion



$$z_A \neq z_B \neq z_C$$

$$\rho_{\text{air}} = 1,29 \text{ kg.m}^{-3}$$

Une aile d'avion se déplace à la vitesse $v = 180 \text{ km.h}^{-1}$.

Tout se passe comme si l'air s'avancé vers l'avion à la vitesse v .

Compte tenu du profil de l'aile, l'air circulant au dessus de l'aile à une vitesse $v' = 194 \text{ km.h}^{-1}$.

- 1) Calculer la différence de pression entre A et B.
- 2) On donne $P_A = P_{A'}$.
 - a- Montrer que $P_{B'} = P_B$.
 - b- Calculer $P_{B'} - P_B = \Delta P$ (différence de pression entre le dessous et le dessus de l'aile).
- 3) La composante verticale des forces de pression de l'air sur les ailes est : $F = S \cdot \Delta P$, où S est la surface de la partie inférieure des ailes (surface alaire).
 - a- Calculer F .
 - b- Dans ces conditions l'avion peut-il décoller, sachant que sa masse totale en charge est égale à 500 kg.
- 4) Sous l'action de cette force \vec{F} l'avion s'élève à l'altitude h .
 - a- Montrer que la masse volumique de l'air à cette altitude est égale à $\rho' = 1,29 \text{ kg.m}^{-3}$.
 - b- Calculer h , sachant que ρ' et h sont liés par la relation :

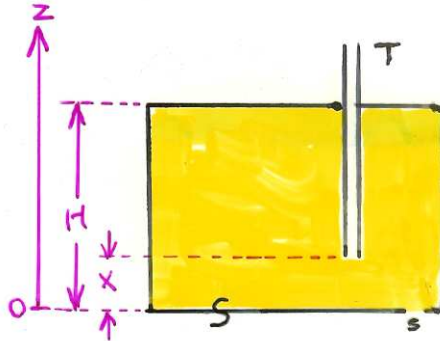
$$\rho' = 1,29 e^{-12,65 \cdot 10^{-5} \cdot h}$$

12. EXERCICES DIVERS

•••Exercice 27 :

Hydrostatique – Hydrodynamique – Gaz parfait

$$\begin{aligned} H &= 1 \text{ m} \\ x &= 20 \text{ cm} \\ S &= 500 \text{ cm}^2 \\ s &= 5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



Le vase de Mariotte : il est constitué d'un récipient, muni d'un orifice de vidange dans lequel l'air peut pénétrer par un tube T, dont on négligera la section.

Le récipient est rempli d'eau.

L'orifice de sortie s est fermé par un bouchon.

1) Calculer la force exercée par l'eau sur le bouchon.

On enlève le bouchon pour laisser l'eau s'écouler, l'air pénètre alors dans le récipient.

La pression en tout point du plan de cote $z = x$ est égale à la pression atmosphérique P_0 .

2) a- Démontrer, en négligeant la vitesse de l'eau dans le récipient, que la vitesse d'écoulement v à la sortie de s est donnée pour tout z tel que $x \leq z \leq H$ par la relation $v = \sqrt{2gx}$.

b- Calculer :

- La vitesse v .
- Le débit volumique d'eau en $\text{L} \cdot \text{min}^{-1}$.
- La vitesse de l'eau dans le récipient.

c- Quel temps mettra la surface libre de l'eau pour passer de la cote H à la cote x ?

Le récipient est à nouveau rempli, et on laisse l'eau s'écouler.

3) a- Quelle sera la pression de l'air P_1 au dessus de l'eau quand la surface de l'eau aura atteint la cote $z_1 = 0,90 \text{ m}$?

A ce moment là on bouche le tube T, le niveau d'eau dans le récipient s'arrête à la cote z_2 .

b- Quelle relation y a-t-il entre la pression P_2 de l'air du récipient, la pression atmosphérique P_0 et z ?

c- L'air étant assimilable à un gaz parfait à température constante, trouver la relation entre P_1 , P_2 , z_1 et z_2 .

En déduire l'équation donnant z_2 .

Calculer z .

13. Ecoulement visqueux

La pression diminue dans le tube d'écoulement.

Elle décroît linéairement en fonction de sa longueur.

Cet effet est du à la **viscosité** du fluide.

Il y a **perte de charge**.

